Ejercicios de continuidad y discontinuidad

Ejercicios resueltos

1. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x - 1}$ en $x = 1$

1. $\exists f(a)$

Calculamos el dominio de $f(x) \Rightarrow$ $\text{Dom}\, f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$ función discontinua en $x = 1$ $\nexists f(1)$

2. $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} = \dfrac{x^2 - x}{x - 1} = \dfrac{0}{0}$ indeterminación. Discontinuidad evitable.

$\lim\limits_{x \to 1} = \dfrac{x^2 - x}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x(x-1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x \to 1} x = 1$. Existe el límite de la función en $x = 1$ y vale 1.

3. Discontinuidad evitable en $x = 1$, la función no tiene imagén en $x = 1$ pero si tiene límite.

2. Calcular el valor de a para que la siguiente función sea continua : $f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 3 - a\,x^2 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

1. $f(1) = x + 1 = 2$

2. Calculamos los límites laterales $\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} x + 1 = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} 3 - a\,x^2 = 3 - a \end{cases} \Rightarrow 2 = 3 - a \Rightarrow a = 1$

3. Si $a = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} = \lim\limits_{x \to 1^+} = f(1) = 2 \Rightarrow$ La función es continua en $x = 1$

3. Calcular el valor de a y b para que la siguiente función sea continua :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ ax + b & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad x \ge 1 \end{cases}$$

Continuidad en $x = 0$

Límites laterales en $x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 + 2x - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} ax + b = b \end{cases} \Rightarrow b = -1$

Continuidad en $x = 1$

Límites laterales en $x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} ax + b = a + b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} 2 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2 \Rightarrow a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3$

Si $a = 3$ y $b = -1$ la función es continua.

4. Estudiar la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} x+5 & \text{si } x\le -2 \\ x^2-1 & \text{si } -2<x\le 1 \\ x+2 & \text{si } x>1 \end{cases}$ **y representarla.**

Continuidad en x = -2

1. $\exists f(a) \Rightarrow f(-2) = x+5 = 3 \Rightarrow$ Existe f(-2)

2. Límites laterales $\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to -2^-} x+5 = 3 \\ \lim_{x\to -2^+} x^2-1 = 3 \end{cases}$ Existe límite en x = -2 y vale 3

3. $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a) \Rightarrow \lim_{x\to -2^-} = \lim_{x\to -2^+} = f(-2) = 3$

Se cumplen las 3 condiciones y por lo tanto la función es continua en x = -2.

Continuidad en x = 1

1. $\exists f(a) \Rightarrow f(1) = x^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ Existe f(1)=0

2. Límites laterales $\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} x^2-1 = 0 \\ \lim_{x\to 1^+} x+2 = 3 \end{cases}$ No existe límite en x = 1

Como los límites laterales son distintos la función tiene una discontinuidad de salto finito en x = 1

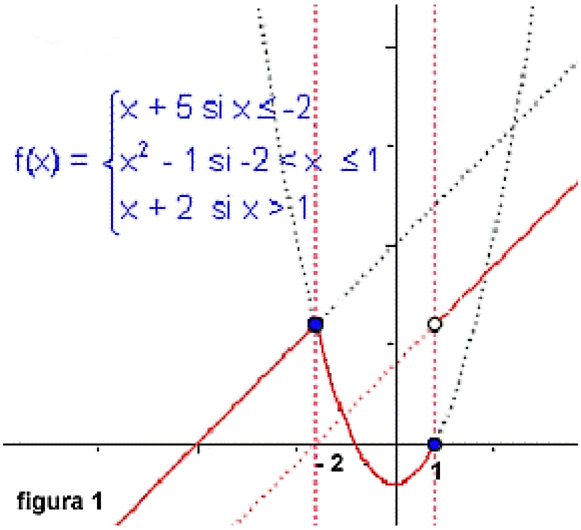

figura 1